

PRAWA PRZELICZANIA

PRAWO MNOŻENIA. Jeśli $A_1, A_2, \dots, A_n$ są skończonymi zbiorami, to liczba ciągów $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, gdzie $a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n$, wynosi

$$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

OGÓLNE PRAWO MNOŻENIA Jeżeli pewna procedura może być rozbita na n kolejnych kroków, z r_1 wynikami w pierwszym kroku, r_2 wynikami w drugim kroku, $\dots$, r_n wynikami w n -tym kroku, to w całej procedurze mamy $r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n$ łącznych wyników (uporządkowane ciągi wyników cząstkowych).

PRAWO DODAWANIA. Jeśli $A_1, A_2, \dots, A_n$ są skończonymi zbiorami parami rozłącznymi, tzn. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

ZASADA BIJEKCJI. Jeśli A i B są skończonymi zbiorami oraz istnieje bijekcja $f: A \rightarrow B$, to $|A| = |B|$.

SCHEMATY WYBORU

PERMUTACJĄ BEZ POWTÓRZEŃ zbioru n -elementowego nazywamy każdy ciąg długości n o elementach ze zbioru X , przy czym elementy tego ciągu nie mogą się powtarzać. Liczba permutacji zbioru n -elementowego wynosi $n!$.

PERMUTACJĄ Z POWTÓRZENIAMI n -elementową zbioru $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, w której x_1 występuje n_1 razy, x_2 występuje n_2 razy, itd. oraz $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ nazywamy każdy n -wyrazowy ciąg, w którym x_i występuje n_i razy, $i = 1, 2, \dots, k$. Liczba permutacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego wynosi

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

WARIACJĄ BEZ POWTÓRZEŃ k -elementową zbioru X nazywamy każdy ciąg długości k o elementach ze zbioru X , przy czym elementy tego ciągu nie mogą się powtarzać. Liczba wariacji bez powtórzeń k -elementowych zbioru n -elementowego wynosi

$$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

WARIACJĄ Z POWTÓRZENIAMI k -elementową zbioru X nazywamy każdy ciąg długości k o elementach ze zbioru X . Liczba wariacji z powtórzeniami k -elementowych zbioru n -elementowego wynosi n^k .

KOMBINACJĄ k -elementową zbioru X nazywamy każdy k -elementowy podzbiór zbioru X . Liczba kombinacji k -elementowych zbioru n -elementowego wynosi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

KOMBINACJĄ Z POWTÓRZENIAMI k -elementową zbioru n -elementowego X nazywa się każdy k -elementowy multizbiór (pseudozbiór, kolekcja, zbiór z powtórzeniami) składający się z elementów zbioru X .

$$\bar{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

PERMUTACJE „KORALIKOWE” Szczególnym wariantem permutacji są tzw. permutacje „koralikowe”, gdzie nie jest wyróżniony początek ani koniec, lecz elementy rozstawione są na okręgu. Najlepiej wyobrazić sobie n krzeseł wokół okrągłego stołu, na których mamy posadzić n osób. Nie ma wtedy znaczenia kto gdzie siedzi, ale obok kogo, przy czym ważne jest to, kto jest sąsiadem po lewej stronie a kto po prawej. Oznacza to, że interesują nas klasy abstrakcji w relacji równoważności między permutacjami, w której dwie permutacje są równoważne, jeżeli można otrzymać jedną z drugiej przez cykliczne przesunięcie (obróć). Każda klasa abstrakcji ma n elementów, a co za tym idzie wszystkich klas abstrakcji, tzn. wszystkich permutacji „koralikowych” jest

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

PODZIAŁY ZBIORÓW

Uogólnieniem kombinacji są podziały zbiorów na rozłączne podzbiory o zadanych mocach. Pytamy więc, na ile sposobów można podzielić zbiór Z na r rozłącznych podzbiorów $A_1, A_2, \dots, A_r$, o mocach odpowiednio: $t_1, t_2, \dots, t_r$, gdzie $t_1 + t_2 + \dots + t_r = n$. Zbiór A_1 można wybrać na $\binom{n}{t_1}$ sposobów. Mając wybrany zbiór A_1 , wybieramy z pozostałych elementów zbioru Z elementy zbioru A_2 na $\binom{n-t_1}{t_2}$ sposobów, itd. Stosując ogólne prawo mnożenia, mamy, że wszystkich *ciągów* $A_1, A_2, \dots, A_r$ o żądanych własnościach jest

$$\binom{n}{t_1} \cdot \binom{n-t_1}{t_2} \cdot \dots \cdot \binom{n-t_1-\dots-t_{r-1}}{t_r} = \frac{n!}{t_1! \cdot t_2! \cdot \dots \cdot t_r!}.$$

LITERATURA

Palka Z., Ruciński A.: *Wykłady z kombinatoryki*. Warszawa 2004 WNT.